

Задача № 1. На стальную балку действует нагрузка в виде сосредоточенной силы F и распределенной силы интенсивностью q . Модель балки (расчетная схема) при допущениях, принятых в сопротивлении материалов, изображена на рис. 1. Требуется:

1. Изобразить расчетную схему балки согласно варианту задания, указать на схеме численные значения сил, линейные размеры.

2. Определить методами сопротивления материалов внутренние усилия и построить эпюры. Определить положение опасного сечения.

3. Составить прочностную модель (условие прочности) при изгибе по нормальным напряжениям.

4. Определить осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

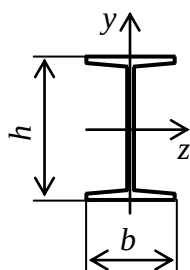
5. Для заданных форм поперечного сечения балки (см. ниже) определить размеры сечения: а) двутавровое сечение – номер двутавра; б) прямоугольное сечение – высоту h и ширину b ; в) прямоугольное сечение – высоту h_1 и ширину b_1 ; г) круглое сечение – диаметр d ;

6. Сравнить балки с указанными формами поперечного сечения по расходу материала (по весу). Выбрать наиболее рациональное сечение по расходу материала.

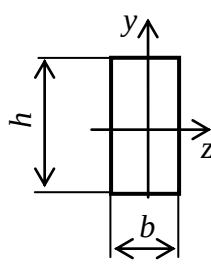
Данные для расчета, схема балки приведены в таблице, принять расчетное сопротивление $R = 200$ МПа.

I	II		III	IV
Схема балки	a , м	b , м	F , кН	q , кН/м
См. рис	4	2	24	20

Поперечные сечения балки

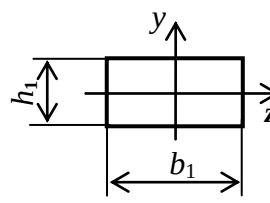


Двутавровое сечение 1



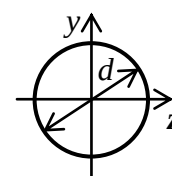
$$h/b = 2$$

Прямоугольное сечение 2



$$h_1/b_1 = 1/2$$

Прямоугольное сечение 3



Круглое сечение 4

* Курсивом в тексте примера выделены пояснения и методические указания к решению задачи.

Решение

1. Изображаем схему балки с указанием численных значений сил, линейных размеров, обозначим также опоры балки A и B (рис. 1):

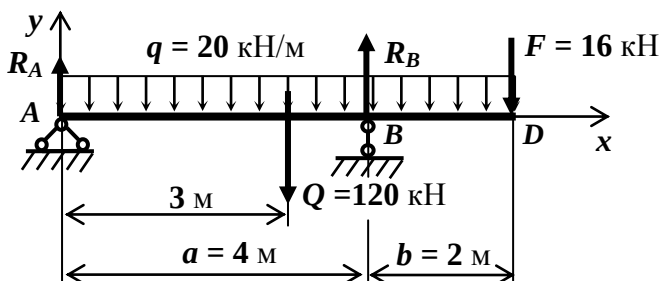


Рис. 1

Определим реакции опор балки. Найдем равнодействующую распределенной нагрузки:

$$Q = q(a + b) = 20 \cdot 6 = 120 \text{ кН.}$$

На схеме покажем реакции опор R_A и R_B . Составим уравнения равновесия :

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot a - F \cdot (a + b) - Q \frac{a + b}{2} = 0,$$

или $R_B \cdot 4 - 16 \cdot 6 - 120 \cdot 3 = 0$, отсюда $R_B = 114 \text{ кН}$;

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot a - F \cdot b + Q \left(\frac{a + b}{2} - b \right) = 0,$$

или $-R_A \cdot 4 - 16 \cdot 2 + Q \cdot 1 = 0$, отсюда $R_A = 22 \text{ кН}$.

Значения реакций опор положительны, это означает, что предварительно показанные направления реакций верны. Выполним проверку правильности определения реакций опор, составив уравнение равновесия $\sum Y = 0$:

$$R_A + R_B - F - Q = 0; 22 + 114 - 16 - 120 = 0; 136 - 136 = 0; 0 = 0 -$$

реакции опор найдены верно.

2. Определим внутренние усилия, поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z , в поперечных сечениях балки методом сечений ([1], с. 33-37). Проводим секущую плоскость на участке 1 (участок AB) и составим уравнения равновесия для левой отсеченной части балки, $0 \leq x_1 \leq a = 4 \text{ м}$, (рис. 1):

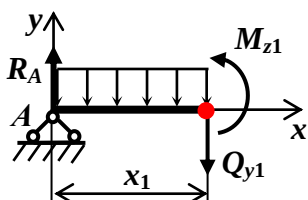


Рис. 2

$$\sum Y = 0; R_A - Q_{y1} - q \cdot x_1 = 0;$$

$$\sum M_z = 0; M_{z1} - R_A \cdot x_1 + q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0. \quad \text{Уравнения моментов}$$

относительно поперечной оси z в сечении балки составляем как уравнение моментов относительно выделенной точки.

Из этих уравнений находим:

$$Q_{y1} = R_A - q \cdot x_1; \quad M_{z1} = R_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2}.$$

Определим значения внутренних усилий в характерных сечениях первого участка:

$x_1 = 0$, сечение A; $Q_{y1}(0) = R_A = 22 \text{ кН}$; $M_{z1}(0) = 0$;

$x_1 = a = 4 \text{ м}$, сечение B; $Q_{y1}(a) = R_A - q \cdot a = 22 - 20 \cdot 4 = -58 \text{ кН}$;

$$M_{z1}(a) = R_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} = 22 \cdot 4 - 20 \cdot \frac{4^2}{2} = -72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поперечная сила меняет знак в пределах участка 1 (с плюса на минус), в этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение – локальный максимум. Определим положение этого сечения, положив $Q_{y1}(x_1^*) = R_A - q \cdot x_1^* = 0$,

отсюда $x_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{22}{20} = 1.1 \text{ м}$. Изгибающий момент в этом сечении:

$$M_{z1}(x_1^*) = R_A \cdot x_1^* - q \cdot \frac{(x_1^*)^2}{2} = 22 \cdot 1.1 - 20 \cdot \frac{1.1^2}{2} = 12.1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

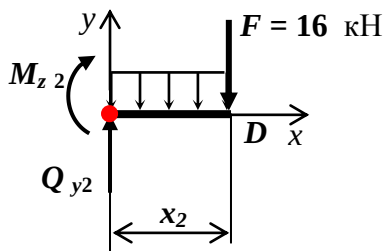


Рис. 3

Аналогично определим внутренние усилия на участке 2 (участок BD). Рассмотрим правую отсеченную часть балки, определим положение сечения координатой x_2 (рис. 3), причем примем отсчет справа налево (значению $x_2 = 0$ соответствует сечение D, значению $x_2 = b = 2 \text{ м}$ соответствует сечение B). Составим уравнения равновесия для правой отсеченной части балки:

$$\sum Y = 0; Q_{y2} - F - q \cdot x_2 = 0; \text{отсюда } Q_{y2} = F + q \cdot x_2.$$

$$\sum M_z = 0; -M_{z2} - F \cdot x_2 - q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 0.$$

$$\text{отсюда } M_{z2} = -F \cdot x_2 - q \cdot \frac{x_2^2}{2}.$$

Найдем значения Q_{y2} и M_{z2} в сечениях B и D:

$$x_2 = 0; Q_{y2}(0) = F = 16 \text{ кН}; M_{z2}(0) = 0;$$

$$x_2 = b = 2 \text{ м}; Q_{y2}(b) = F + q \cdot b = 16 + 20 \cdot 2 = 56 \text{ кН};$$

$$M_{z2}(b) = -F \cdot b - q \cdot \frac{b^2}{2} = -16 \cdot 2 - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -72 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным численным значениям внутренних усилий строим эпюры (рис. 4). Эпюра поперечной силы Q_y на обоих участках – наклонная прямая, наклон которой соответствует направлению распределенной нагрузки q (при перемещении вдоль оси x слева-направо прямая имеет наклон вниз). Эпюра изгибающего момента M_z представляет собой параболу на обоих участках, причем строится эпюра на растянутых волокнах, как принято для эпюр изгибающих моментов в элементах строительных конструкций, положительные значения изгибающего момента откладываются вниз, отрицательные – вверх. Правильность построения эпюр можно проверить, используя свойства эпюр и дифференциальную зависимость между Q_y и M_z ([1], с.33-37).

3. Условие прочности по нормальным напряжениям ([1], с. 164-167):

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R,$$

где $|M_z|_{\max}$ – наибольший по величине изгибающий момент в опасном сечении балки; значение этого момента находим по эпюре изгибающего момента: $|M_z|_{\max} = 72 \text{ кН} \cdot \text{м}$; W_z – момент сопротивления поперечного сечения балки при изгибе (осевой момент сопротивления, м^3), геометрическая характеристика сечения, зависящая от формы и

размеров сечения; для простых типовых сечений формулы для W_z можно найти в справочных таблицах, для стандартных профилей - в таблицах сортамента;
 R – расчетное сопротивление материала, задается в нормативных документах, Па (МПа).

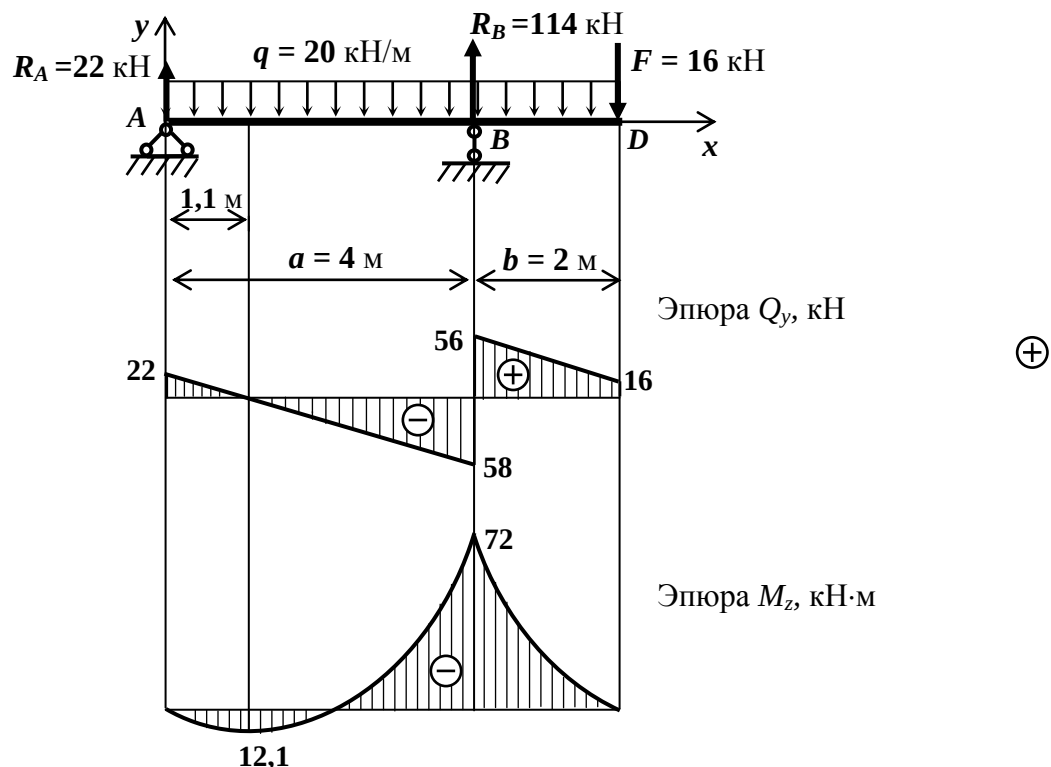


Рис. 4

4. Из условия прочности определим W_z (проектировочный расчет):

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R}.$$

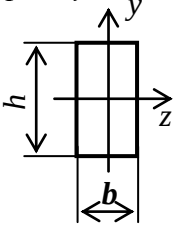
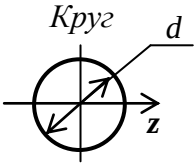
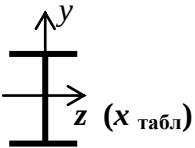
По найденному значению W_z можно подобрать номер стандартного профиля (двутавра) и определить размеры заданных сечений.

В нашем примере

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{72 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 360 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 360 \text{ см}^3.$$

Численные расчеты проводим в системе СИ, силы переводим в ньютоны ($\text{кН} = 10^3 \text{ Н}$), МПа в Па ($\text{МПа} = 10^6 \text{ Па}$), линейные размеры подставляем в метрах, геометрические характеристики считаем в метрах (в соответствующей степени), затем можно перевести в другие единицы длины (см^n , мм^n).

5. Геометрические характеристики простых сечений приведены в таблице, поперечная ось обозначена z (справочный материал, [1] с. 164, [2])

Форма сечения	Площадь A	Осевой момент инерции J_z	Осевой момент сопротивления W_z
Прямоугольник  $h/b = k$	hb	$bh^3/12$	$bh^2/6 = b^3k^2/6$
Круг 	$\pi d^2/4$	$\pi d^4/64$	$\pi d^3/32$
Двутавр  (см. сортамент, [1], с. 552)	$A_{табл}$	$J_{x табл}$	$W_{x табл}$

Определяем размеры заданных сечений.

- Двутавровое сечение. По таблице сортамента (ГОСТ 8239-89) находим ближайшее большее значение момента сопротивления $W_z = W_{x табл} = 371 \text{ см}^3$, двутавр № 27, $A = 40,2 \text{ см}^2$. Проверим выполнение условия прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} = \frac{72 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = 194 \cdot 10^6 \text{ Па} = 194 \text{ МПа} \leq R = 200 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено. Величина σ_{max} для подобранной балки оказалась меньше расчетного сопротивления, т.е. балка недогружена, определим в процентах «недогруз» балки:

$$\Delta\sigma = \frac{200 - 194}{200} \cdot 100 = 3\% < 5\% - \text{допускается } \pm 5\%.$$

- Прямоугольное сечение, $k = \frac{h}{b}$. Из формулы, приведенной в таблице $W_z = \frac{b^3 k^2}{6}$,

$$\text{выражаем размер } b = \sqrt[3]{\frac{6W_z}{k^2}}.$$

- Прямоугольное сечение 2, $k = 2$: $b = \sqrt[3]{\frac{6W_z}{k^2}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 360}{2^2}} = 8,14 \text{ см}$, $h = 2b = 16,28 \text{ см}$,

$$A_2 = bh = 8,14 \cdot 16,28 = 132,52 \text{ см}^2.$$

- Прямоугольное сечение 3, $k=0,5$: $b_1 = \sqrt[3]{\frac{6W_z}{k^2}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 360}{0,5^2}} = 20,52 \text{ см}$, $h_1 = 0,5b_1 = 10,26 \text{ см}$,
 $A_3 = b_1 h_1 = 20,52 \cdot 10,26 = 210,53 \text{ см}^2$.

3) Круглое сечение 4, $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 360}{3,14}} = 15,42 \text{ см}, \quad A_4 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15,42^2}{4} = 186,7 \text{ см}^2$$

При реальном проектировании полученный в результате расчета размер (b, h, d) округляют до стандартного значения, как правило, до ближайшего большего, что приводит к увеличению запаса прочности. В данном задании эти округления не проводим.

6. Сравним заданные сечения по расходу материала. Масса балки определяется как произведение плотности материала на объем. Длина всех балок одинаковая, поэтому массы балок можно оценить по площадям поперечного сечения. Наименьшая площадь поперечного сечения у двутавра. Найдем отношения площадей, и соответственно масс, других сечений к площади двутавра:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{132,52}{40,2} = 3,3; \\ \frac{A_3}{A_1} &= \frac{210,53}{40,2} = 5,24; \\ \frac{A_4}{A_1} &= \frac{186,7}{40,2} = 4,64. \end{aligned}$$

Приведенные отношения показывают, что при одинаковых длине и моменте сопротивления поперечного сечения, т. е. при одинаковой прочности, наибольшая масса будет у балки с прямоугольным сечением 3, длинная сторона которого параллельна оси z. Наиболее рациональной по расходу материала является балка с двутавровым сечением.

Литература

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 2-е изд. Испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.: ил.
2. Интернет-ресурсы sopromat.ru